Dimensionsreduktion mit PCA und EFA

Oliver Gansser

Dimensionsreduktion

Datensätze in den Sozialwissenschaften, und damit auch in der Wirtschaftspsychologie, haben oft viele Variablen - oder auch Dimensionen - und es ist vorteilhaft, diese auf eine kleinere Anzahl von Variablen (oder Dimensionen) zu reduzieren. Zusammenhänge zwischen verschiedenen Dimensionen oder Unterschiede zwischen verschiedenen Gruppen bezüglich einer oder mehrerer Dimensionen (z. B. bei Experimenten) können so klarer und einfacher identifiziert werden. Dimensionen mit konkreten Sachverhalten werden in der Sprache der Wissenschaft häufig als **Konstrukte** bezeichnet.

Konstrukte

Konstrukte stellen in den Sozialwissenschaften gedankliche bzw. theoretische Sachverhalt dar, die nicht direkt beobachtbar und damit nicht direkt messbar sind. Nehmen wir beispielsweise an, es soll das Konstrukt `Anerkennung` im Rahmen einer sozialwissenschaftlichen Studie gemessen werden. Dabei gibt es zunächst zwei Fragestellungen:

1. Was bedeutet Anerkennung?
2. Wie wird Anerkennung gemessen?

Was bedeutet Anerkennung?

Liest man bei Wikipediea diesen Begriff nach, kommt folgende Antwort: "Anerkennung bedeutet die Erlaubnis einer Person oder einer Gruppe gegenüber einer anderen Person, Gruppe oder Institution, sich mit ihren derzeitigen spezifischen Eigenschaften an der Kommunikation, an Entscheidungsprozessen oder anderen gesellschaftlichen Prozessen zu beteiligen. Der Begriff Anerkennung wird auch als Synonym für Akzeptanz, Lob oder Respekt verwendet."

Messung von Anerkennung

Gut, wir kennen nun die Bedeutung von Anerkennung, aber wir wissen immer noch nicht, wie wir Anerkennung messen können. Da die Suche nach Anerkennung in der Psychologie kein neues `Konstrukt` darstellt, sondern schon vielfach gemessen wurde, müssen wir nur in bisherigen Forschungsergebnissen nachlesen. Dies führt unweigerlich dazu, dass wir auf bisherige Forschungen stoßen, die das Konstrukt Anerkennung als ein `multidimensionales Konstrukt` definieren und mit mehr als einem **Item (Indikator)** messen. Mehr zur Messung von Anerkennung weiter unten im Datenbeispiel. D. h. der Sachverhalt `Anerkennung` wird aus anderen, messbaren Sachverhalten `(Indikatoren)` messbar gemacht. Der Prozess des **Messbar machens** heißt Operationalisierung. Mehr zur Operationalisierung von Anerkennung und anderen Konstrukten betrachten wir weiter untern im Datenbeispiel.

Zwei Methoden der Dimension

In diesem Kapitel betrachten wir zwei gängige Methoden, um die Komplexität von multivarianten, metrischen Daten zu reduzieren, indem wir die Anzahl der Dimensionen in den Daten reduzieren.

- Die *Hauptkomponentenanalyse (PCA)* versucht, unkorrelierte Linearkombinationen zu finden, die die maximale Varianz in den Daten erfassen. Die PCA beinhaltet also das Extrahieren von linearen Zusammenhängen der beobachteten Variablen.
- Die *Exploratorische Faktorenanalyse (EFA)* versucht, die Varianz auf Basis einer kleinen Anzahl von Dimensionen zu modellieren, während sie gleichzeitig versucht, die Dimensionen in Bezug auf die ursprünglichen Variablen interpretierbar zu machen. Es wird davon ausgegangen, dass die Daten

einem Faktoren Modell entsprechen, bei der die beobachteten Korrelationen auf `latente` Faktoren zurückführen. Mit der EFA wird nicht die gesamte Varianz erklärt.

Welches ist die bessere Methode?

In der Psychologie werden diese beiden Methoden oft in der Konstruktion von mehrstufigen Tests angewendet, um festzustellen, welche `Items` auf welche Konstrukte laden. Sie ergeben in der Regel ähnliche inhaltliche Schlussfolgerungen. Dies erklärt, warum einige Statistik-Software-Programme beide Methoden zusammenpacken. So wird die PCA als Standard-Extraktionsmethode in den SPSS-Faktoranalyse-Routinen verwendet. Dies führt zweifellos zu einer gewissen Verwirrung über die Unterscheidung zwischen den beiden Methoden. Die EFA wird oft als `Common Factor Analysis oder principal axis factoring (Hauptachsenanalyse)` bezeichnet. EFA verwendet eine Vielzahl von Optimierungsroutinen und das Ergebnis, im Gegensatz zu PCA, hängt von der verwendeten Optimierungsroutine und Ausgangspunkten für diese Routinen ab. Es gibt also keine einzigartige Lösung bei der EFA.

Faustregeln

Eine einfache Faustregel für die Entscheidung zwischen diesen beiden Methoden:

- Führe die PCA durch, wenn die korrelierten beobachteten Variablen einfach auf einen kleineren Satz von wichtigen unabhängigen zusammengesetzten Variablen reduziert werden soll.
- Führe die EFA durch, wenn ein theoretisches Modell von latenten Faktoren zugrunde liegt, dass die beobachtete Variablen verursacht.

Gründe für die Notwendigkeit der Datenreduktion

- Im technischen Sinne der Dimensionsreduktion können wir statt Variablen-Sets die Faktor-/ Komponentenwerte verwenden (z. B. für Mittelwertvergleiche zwischen Experimental- und Kontrollgruppe, Regressionsanalyse und Clusteranalyse).
- Wir können Unsicherheit verringern. Wenn wir glauben, dass ein Konstrukt nicht eindeutig messbar ist, dann kann mit einem Variablen-Set die Unsicherheit reduziert werden.
- Wir können den Aufwand bei der Datenerfassung vereinfachen, indem wir uns auf Variablen konzentrieren, von denen bekannt ist, dass sie einen hohen Beitrag zum interessierenden Faktor/ Komponente leisten. Wenn wir feststellen, dass einige Variablen für einen Faktor nicht wichtig sind, können wir sie aus dem Datensatz eliminieren.

Benötigte Pakete

Pakete, die für diese Datenanalyse benötigt werden, müssen vorher einmalig in R installiert werden.

```
# install.packages("corrplot")
# install.packages("gplots")
# install.packages("nFactors")
```

Daten

Wir untersuchen die Dimensionalität mittels einer auf 1000 Fälle reduzierten Zufallsauswahl von 15 Variablen zur Messung der grundlegenden Wertorientierungen von Menschen. Die Daten wurden im Sommersemester 2017 von FOM Studierenden im ersten Semester an der FOM bundesweit erhoben. Die Variablen zu Wertorientierungen wurden ursprüngliche aus dem 40-Item-Set des «Portraits Value Questionnaire» (PVQ) von Schwartz adaptiert und durch die Studien an der FOM seit 2014 stufenweise bis auf 15 relevante Variablen reduziert. Alle Variablen wurden auf einer Skala von 1 bis 7 (wobei 1 am wenigsten und 7 am meisten zutrifft) abgefragt.

Einlesen

Download und Einlesen der Daten mit dem Befehl read.csv2.

```
download.file("https://osf.io/teymq/download", destfile = "Werte.csv")
Werte <- read.csv2("Werte.csv", encoding="UTF-8")
```

Wir überprüfen zuerst die Struktur des Datensatzes, die ersten 6 Zeilen und die Zusammenfassung.

```
str(Werte)
```

```
## 'data.frame':    1000 obs. of  15 variables:
##  $ Spaß              : int  6 3 2 7 3 5 7 5 4 5 ...
##  $ Freude            : int  6 7 7 7 4 5 5 5 4 5 ...
##  $ Aufregung         : int  7 3 3 7 3 5 5 5 3 3 ...
##  $ Führung           : int  6 1 6 4 4 4 3 3 2 2 ...
##  $ Entscheidung      : int  6 1 6 3 4 3 4 3 1 2 ...
##  $ Religiösität      : int  2 7 4 1 5 1 3 3 3 1 ...
##  $ Respekt           : int  5 7 7 7 2 5 6 3 4 5 ...
##  $ Demut             : int  4 3 6 3 4 3 4 2 2 5 ...
##  $ Gefahrenvermeidung: int  6 7 7 2 7 3 4 5 6 5 ...
##  $ Sicherheit        : int  6 7 7 6 7 4 6 6 7 4 ...
##  $ Ordentlichkeit    : int  6 7 3 3 6 5 6 7 3 7 ...
##  $ Unabhängigkeit    : int  6 7 7 5 3 7 5 6 2 5 ...
##  $ Zuhören           : int  5 6 1 3 3 5 5 4 5 6 ...
##  $ Umweltbewusstsein : int  4 7 1 7 6 5 7 6 6 5 ...
##  $ Interesse         : int  7 6 7 5 2 7 7 6 7 7 ...
```

```
head(Werte)
```

```
##   Spaß Freude Aufregung Führung Entscheidung Religiösität Respekt Demut
## 1    6      6         7       6            6            2       5     4
## 2    3      7         3       1            1            7       7     3
## 3    2      7         3       6            6            4       7     6
## 4    7      7         7       4            3            1       7     3
## 5    3      4         3       4            4            5       2     4
## 6    5      5         5       4            3            1       5     3
##   Gefahrenvermeidung Sicherheit Ordentlichkeit Unabhängigkeit Zuhören
## 1                  6          6              6              6       5
## 2                  7          7              7              7       6
## 3                  7          7              3              7       1
## 4                  2          6              3              5       3
## 5                  7          7              6              3       3
## 6                  3          4              5              7       5
##   Umweltbewusstsein Interesse
## 1                 4         7
## 2                 7         6
## 3                 1         7
## 4                 7         5
## 5                 6         2
## 6                 5         7
```

```
summary(Werte)
```

```
##       Spaß           Freude        Aufregung        Führung
##  Min.   :1.000   Min.   :1.000   Min.   :1.000   Min.   :1.000
##  1st Qu.:4.000   1st Qu.:4.000   1st Qu.:3.000   1st Qu.:2.000
##  Median :5.000   Median :5.000   Median :4.000   Median :4.000
##  Mean   :5.233   Mean   :5.123   Mean   :4.179   Mean   :3.612
##  3rd Qu.:7.000   3rd Qu.:6.000   3rd Qu.:5.000   3rd Qu.:5.000
##  Max.   :7.000   Max.   :7.000   Max.   :7.000   Max.   :7.000
```

```
##   Entscheidung    Religiösität      Respekt          Demut
##  Min.   :1.000   Min.   :1.000   Min.   :1.000   Min.   :1.000
##  1st Qu.:2.000   1st Qu.:1.000   1st Qu.:4.000   1st Qu.:2.000
##  Median :4.000   Median :2.000   Median :5.000   Median :4.000
##  Mean   :3.714   Mean   :2.955   Mean   :4.783   Mean   :3.684
##  3rd Qu.:5.000   3rd Qu.:4.000   3rd Qu.:6.000   3rd Qu.:5.000
##  Max.   :7.000   Max.   :7.000   Max.   :7.000   Max.   :7.000
##  Gefahrenvermeidung   Sicherheit    Ordentlichkeit  Unabhängigkeit
##  Min.   :1.000      Min.   :1.000   Min.   :1.000   Min.   :1.000
##  1st Qu.:4.000      1st Qu.:5.000   1st Qu.:4.000   1st Qu.:5.000
##  Median :5.000      Median :6.000   Median :6.000   Median :6.000
##  Mean   :4.996      Mean   :5.651   Mean   :5.198   Mean   :5.556
##  3rd Qu.:6.000      3rd Qu.:7.000   3rd Qu.:6.000   3rd Qu.:7.000
##  Max.   :7.000      Max.   :7.000   Max.   :7.000   Max.   :7.000
##     Zuhören      Umweltbewusstsein   Interesse
##  Min.   :1.000   Min.   :1.000     Min.   :1.000
##  1st Qu.:4.000   1st Qu.:4.000     1st Qu.:4.000
##  Median :5.000   Median :5.000     Median :6.000
##  Mean   :5.031   Mean   :4.894     Mean   :5.244
##  3rd Qu.:6.000   3rd Qu.:6.000     3rd Qu.:6.000
##  Max.   :7.000   Max.   :7.000     Max.   :7.000
```

Wir sehen in der `summary ()`, dass die Bereiche der Bewertungen für jede Variable 1-7 sind. In `str()` sehen wir, dass die Bewertungen als numerisch (Integer, also ganzzahlig) eingelesen wurden. Die Daten sind somit richtig formatiert.

Neuskalierung der Daten

In vielen Fällen ist es sinnvoll, Rohdaten neu zu skalieren. Dies wird üblicherweise als **Standardisierung**, **Normierung**, oder **Z Scoring/Transformation** bezeichnet. Als Ergebnis ist der Mittelwert aller Variablen über alle Beobachtungen dann 0. Da wir hier gleiche Skalenstufen haben, ist ein Skalieren nicht unbedingt notwendig, wir führen es aber trotzdem durch.

Ein einfacher Weg, alle Variablen im Datensatz auf einmal zu skalieren ist der Befehl `scale()`. Da wir die Rohdaten nie ändern wollen, weisen wir die Rohwerte zuerst einem neuen Dataframe `Werte.sc` zu und skalieren anschließend die Daten. Wir skalieren in unserem Datensatz alle Variablen.

```
Werte.sc<- scale(Werte)
summary(Werte.sc)
```

```
##       Spaß             Freude           Aufregung          Führung
##  Min.   :-2.8417   Min.   :-2.80273   Min.   :-1.8739   Min.   :-1.4505
##  1st Qu.:-0.8277   1st Qu.:-0.76339   1st Qu.:-0.6950   1st Qu.:-0.8952
##  Median :-0.1564   Median :-0.08361   Median :-0.1055   Median : 0.2155
##  Mean   : 0.0000   Mean   : 0.00000   Mean   : 0.0000   Mean   : 0.0000
##  3rd Qu.: 1.1862   3rd Qu.: 0.59617   3rd Qu.: 0.4840   3rd Qu.: 0.7708
##  Max.   : 1.1862   Max.   : 1.27595   Max.   : 1.6629   Max.   : 1.8814
##   Entscheidung      Religiösität        Respekt           Demut
##  Min.   :-1.5357   Min.   :-0.9976   Min.   :-2.2525   Min.   :-1.6078
##  1st Qu.:-0.9698   1st Qu.:-0.9976   1st Qu.:-0.4662   1st Qu.:-1.0087
##  Median : 0.1618   Median :-0.4873   Median : 0.1292   Median : 0.1893
##  Mean   : 0.0000   Mean   : 0.0000   Mean   : 0.0000   Mean   : 0.0000
##  3rd Qu.: 0.7277   3rd Qu.: 0.5332   3rd Qu.: 0.7246   3rd Qu.: 0.7883
##  Max.   : 1.8593   Max.   : 2.0640   Max.   : 1.3200   Max.   : 1.9863
##  Gefahrenvermeidung    Sicherheit      Ordentlichkeit    Unabhängigkeit
##  Min.   :-2.528060   Min.   :-3.2993   Min.   :-2.6748   Min.   :-3.4336
##  1st Qu.:-0.630117   1st Qu.:-0.4618   1st Qu.:-0.7633   1st Qu.:-0.4190
##  Median : 0.002531   Median : 0.2476   Median : 0.5110   Median : 0.3346
##  Mean   : 0.000000   Mean   : 0.0000   Mean   : 0.0000   Mean   : 0.0000
```

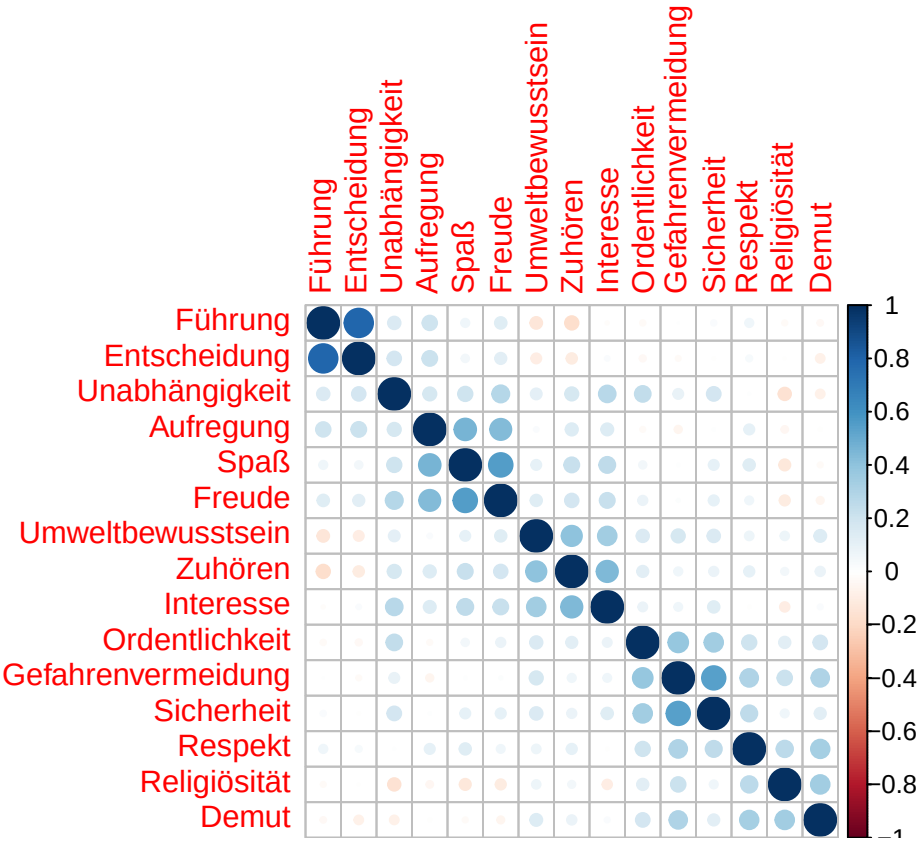
```
##  3rd Qu.: 0.635178   3rd Qu.: 0.9570   3rd Qu.: 0.5110   3rd Qu.: 1.0883
##  Max.   : 1.267826   Max.   : 0.9570   Max.   : 1.1482   Max.   : 1.0883
##     Zuhören         Umweltbewusstsein   Interesse
##  Min.   :-2.68836   Min.   :-2.6047   Min.   :-2.9437
##  1st Qu.:-0.68760   1st Qu.:-0.5980   1st Qu.:-0.8629
##  Median :-0.02067   Median : 0.0709   Median : 0.5244
##  Mean   : 0.00000   Mean   : 0.0000   Mean   : 0.0000
##  3rd Qu.: 0.64625   3rd Qu.: 0.7398   3rd Qu.: 0.5244
##  Max.   : 1.31317   Max.   : 1.4087   Max.   : 1.2180
```

Die Daten wurden richtig skaliert, da der Mittelwert aller Variablen über alle Beobachtungen 0 ist.

Zusammenhänge in den Daten

Wir verwenden den Befehl `corrplot()` für die Erstinspektion von bivariaten Beziehungen zwischen den Variablen. Das Argument `order = "hclust"` ordnet die Zeilen und Spalten entsprechend der Ähnlichkeit der Variablen in einer hierarchischen Cluster-Lösung der Variablen (mehr dazu im Teil *Clusteranalyse*) neu an.

```
library(corrplot)

corrplot(cor(Werte.sc), order="hclust")
```



Die Visualisierung der Korrelation der Variablen scheint fünf Cluster zu zeigen:

- ("Führung", "Entscheidung")
- ("Aufregung", "Spaß", "Freude")
- ("Umweltbewusstsein", "Zuhören", "Interesse")
- ("Ordentlichkeit", "Gefahrenvermeidung", "Sicherheit")
- ("Respekt", "Religiösität", "Demut")

Daten mit fehlende Werten

Wenn in den Daten leere Zellen, also fehlende Werte, vorhanden sind, dann kann es bei bestimmten Rechenoperationen zu Fehlermeldungen kommen. Dies betrifft zum Beispiel Korrelationen, PCA und EFA. Der Ansatz besteht deshalb darin, NA-Werte explizit zu entfernen. Dies kann am einfachsten mit dem Befehl `na.omit()` geschehen:

Beispiel:

```
corrplot(cor(na.omit((Werte.sc), order="hclust"))
```

Da wir in unserem Datensatz vollständige Daten verwenden, gibt es auch keine Leerzellen.

Hinweis: In vielen Funktionen gibt es auch die Option `na.rm = TRUE`, die fehlende Werte entfernt, z. B.:

```
var(Werte.sc, na.rm = TRUE)
```

Hauptkomponentenanalyse (PCA)

Die PCA berechnet ein Variablenset (Komponenten) in Form von linearen Gleichungen, die die linearen Beziehungen in den Daten erfassen. Die erste Komponente erfasst so viel Streuung (Varianz) wie möglich von allen Variablen als eine einzige lineare Funktion. Die zweite Komponente erfasst unkorreliert zur ersten Komponente so viel Streuung wie möglich, die nach der ersten Komponente verbleibt. Das geht so lange weiter, bis es so viele Komponenten gibt wie Variablen.

Bestimmung der Anzahl der Hauptkomponenten

Betrachten wir in einem ersten Schritt die wichtigsten Komponenten für die Werte. Wir finden die Komponenten mit `prcomp()`.

```
Werte.pc<- prcomp(Werte.sc)
summary(Werte.pc)
```

```
## Importance of components%s:
##                            PC1    PC2    PC3     PC4     PC5     PC6    PC7
## Standard deviation     1.6907 1.5422 1.3841 1.14283 1.07975 0.88552 0.8298
## Proportion of Variance 0.1906 0.1585 0.1277 0.08707 0.07772 0.05228 0.0459
## Cumulative Proportion  0.1906 0.3491 0.4768 0.56391 0.64163 0.69391 0.7398
##                            PC8     PC9   PC10    PC11    PC12    PC13
## Standard deviation     0.80784 0.78821 0.7599 0.74135 0.68836 0.64775
## Proportion of Variance 0.04351 0.04142 0.0385 0.03664 0.03159 0.02797
## Cumulative Proportion  0.78332 0.82474 0.8632 0.89988 0.93147 0.95944
##                           PC14    PC15
## Standard deviation     0.64487 0.43884
## Proportion of Variance 0.02772 0.01284
## Cumulative Proportion  0.98716 1.00000
```

```
# Berechnung der Gesamtvarianz
Gesamtvarianz <- sum(Werte.pc$sdev^2)
Gesamtvarianz
```

```
## [1] 15
```

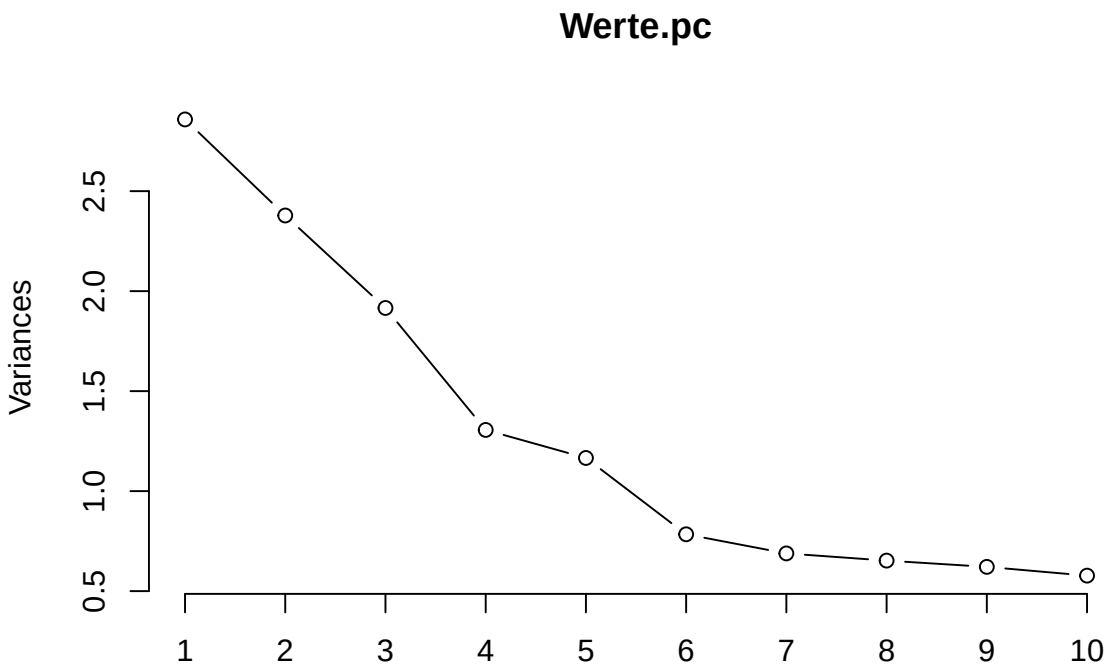
```
# Bei sum(Werte.pc$sdev^2) wird die Summe aller 15 Standardabweichungen berechnet.

# Varianzanteil der ersten Hauptkomponente
Werte.pc$sdev[1]^2/Gesamtvarianz
```

```
## [1] 0.1905689
```

Scree-Plot

Der Standard-Plot `plot()` für die PCA ist ein **Scree-Plot**, dieser zeigt uns in Reihenfolge der Hauptkomponenten jeweils die durch diese Hauptkomponente erfasste Streuung (Varianz). Wir plotten ein Liniendiagramm mit dem Argument `type = "l"` (`l` für Linie):

```
plot(Werte.pc, type="l")
```



Wir sehen anhand des Scree-Plots, dass bei den Werte-Daten der Anteil der Streuung nach der fünften Komponente nicht mehr wesentlich abnimmt. Es soll die Stelle gefunden werden, ab der die Varianzen der Hauptkomponenten deutlich kleiner sind. Je kleiner die Varianzen, desto weniger Streuung erklärt diese Hauptkomponente.

Elbow-Kriterium

Nach diesem Kriterium werden alle Hauptkomponenten berücksichtigt, die links von der Knickstelle im Scree-Plot liegen. Gibt es mehrere Knicks, dann werden jene Hauptkomponenten ausgewählt, die links vom rechtesten Knick liegen. Gibt es keinen Knick, dann hilft der Scree-Plot nicht weiter. Bei den Werte-Daten tritt der Ellbogen, je nach Betrachtungsweise, entweder bei vier oder sechs Komponenten auf. Dies deutet darauf hin, dass die ersten fünf Komponenten die meiste Streuung in den Werte-Daten erklären.

Eigenwert-Kriterium

Der Eigenwert ist eine Metrik für den Anteil der erklärten Varianz. Die Anzahl Eigenwerte können wir über den Befehl `eigen()` ausgeben. An dieser Stelle können wir die original Daten nehmen, da wir keine unterschiedlichen Skalenstufen haben.

```
eigen(cor(Werte))
```

```
## eigen() decomposition
```

```
## $values
##  [1] 2.8585328 2.3782591 1.9157861 1.3060498 1.1658554 0.7841482 0.6885614
##  [8] 0.6525990 0.6212712 0.5774799 0.5495986 0.4738398 0.4195816 0.4158557
## [15] 0.1925814
##
## $vectors
##              [,1]        [,2]         [,3]        [,4]        [,5]
##  [1,] -0.33604416 -0.25622090  0.128161949 -0.25708630 -0.31686659
##  [2,] -0.33938849 -0.28521782  0.081849344 -0.15917643 -0.27168790
##  [3,] -0.26388043 -0.31660619 -0.020871466 -0.35409613 -0.16300892
##  [4,] -0.08232717 -0.33393447 -0.511129387  0.06869099  0.27375878
##  [5,] -0.08708864 -0.34714315 -0.474128588  0.07565331  0.34831269
##  [6,] -0.05342944  0.30307543 -0.218554329 -0.38300203  0.21851873
##  [7,] -0.23623640  0.21437522 -0.256385690 -0.31711196 -0.08949205
##  [8,] -0.15397729  0.32691967 -0.171467677 -0.34482751  0.14055059
##  [9,] -0.27464246  0.33825802 -0.234044155  0.19355770 -0.14567446
## [10,] -0.30435792  0.21717193 -0.166429441  0.32257765 -0.24460149
## [11,] -0.27346924  0.23434490 -0.116388405  0.27914986 -0.16754023
## [12,] -0.29540078 -0.17177961  0.006053197  0.40251719 -0.00239680
## [13,] -0.31100983  0.05553932  0.338064762 -0.08652082  0.35043217
## [14,] -0.27757710  0.14689404  0.248735075  0.03424423  0.39595561
## [15,] -0.31880702 -0.07337078  0.274358131  0.12830750  0.37245140
##              [,6]        [,7]         [,8]        [,9]        [,10]
##  [1,] -0.08891916  0.01202132 -0.041248709 -0.01408612  0.130206897
##  [2,]  0.07516516  0.26627419 -0.135852146 -0.08580310 -0.157042163
##  [3,]  0.01525403  0.10078342 -0.003367682  0.15291415  0.074930194
##  [4,] -0.08815771  0.01520430 -0.055026932 -0.07919406  0.108873884
##  [5,] -0.04338889  0.05838507  0.038565529 -0.06111274  0.096609791
##  [6,]  0.29935020  0.46059789  0.328175909  0.38723990 -0.195176261
##  [7,] -0.11693492 -0.53964197  0.422986131 -0.37907293 -0.148699391
##  [8,]  0.14106740 -0.28547974 -0.709911656  0.08261177 -0.024519209
##  [9,] -0.26810114  0.13054104 -0.123139927  0.16569043 -0.004325198
## [10,] -0.43448121  0.11076199  0.115161722  0.20479717 -0.084083249
## [11,]  0.54633532  0.10897837  0.020664210 -0.24850940  0.584651315
## [12,]  0.49131083 -0.25152458  0.024186081  0.11560439 -0.599990338
## [13,]  0.02771788 -0.11763325  0.352104105  0.05618006  0.237563841
## [14,] -0.16611769  0.39099628 -0.156832775 -0.58303462 -0.256953030
## [15,] -0.15648663 -0.24316239 -0.081935458  0.41348810  0.198545304
##             [,11]       [,12]        [,13]        [,14]        [,15]
##  [1,]  0.31009355 -0.02696768  0.676083103  0.239639453 -0.014012424
##  [2,]  0.38217601 -0.24114988 -0.556270220 -0.237090974 -0.026889620
##  [3,] -0.73005040  0.30268343 -0.103662222 -0.052357923  0.016105582
##  [4,]  0.07015185 -0.07370359  0.007483174  0.050894991  0.706143396
##  [5,]  0.02274680 -0.09446330  0.050783912  0.009339351 -0.698648864
##  [6,]  0.19617221  0.12114616  0.074648018  0.069167377  0.045368717
##  [7,]  0.10393977  0.19427884 -0.107839123 -0.117816660 -0.016220508
##  [8,] -0.04440720 -0.17554504 -0.064457279  0.220164114 -0.056024044
##  [9,] -0.11465862 -0.16313432  0.283295448 -0.667112771  0.008995238
## [10,] -0.06376440 -0.03363296 -0.240797718  0.583661212 -0.038214621
## [11,]  0.01333556  0.17246152 -0.061627837  0.051558150 -0.004438732
## [12,] -0.11045917 -0.02350423  0.167934268  0.027612969  0.029341249
## [13,] -0.20176120 -0.64134659 -0.026203185  0.030445815  0.061558203
## [14,] -0.10337042  0.21220308  0.101912203  0.063464930  0.019925600
## [15,]  0.29517385  0.48735507 -0.132005347 -0.140461650 -0.002008972
```

Der Eigenwert einer Komponente/ eines Faktors sagt aus, wie viel Varianz dieser Faktor an der Gesamtvarianz aufklärt. Laut dem Eigenwert-Kriterium sollen nur Faktoren mit einem Eigenwert größer 1 extrahiert werden. Dies sind bei den Werte-Daten fünf Komponenten/ Faktoren, da fünf Eigenwerte größer 1 sind. Der Grund ist, dass Komponenten/ Faktoren mit einem Eigenwert kleiner als 1 weniger Erklärungswert

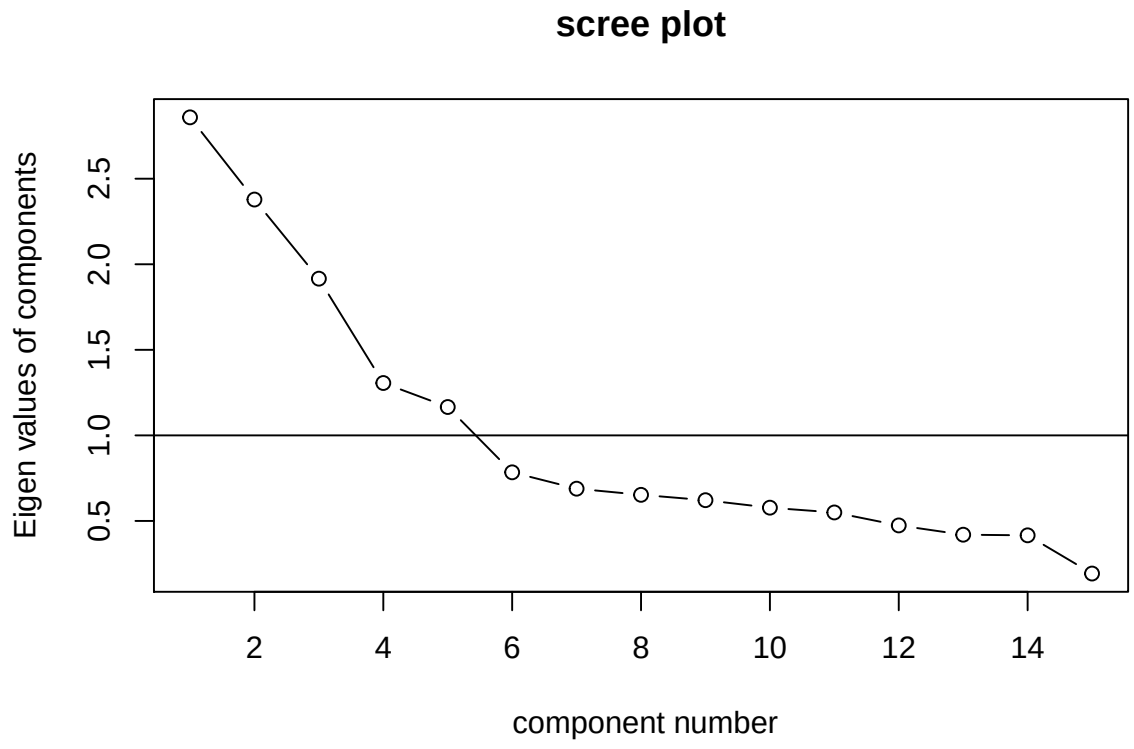
haben als die ursprünglichen Variablen.

Dies kann auch grafisch mit dem `VSS.Scree` geplotet werden.

```
library(nFactors)
```

```
## Loading required package: MASS
## Loading required package: psych
## Loading required package: boot
##
## Attaching package: 'boot'
## The following object is masked from 'package:psych':
##
##     logit
## Loading required package: lattice
##
## Attaching package: 'lattice'
## The following object is masked from 'package:boot':
##
##     melanoma
##
## Attaching package: 'nFactors'
## The following object is masked from 'package:lattice':
##
##     parallel
```

```
VSS.scree(Werte)
```

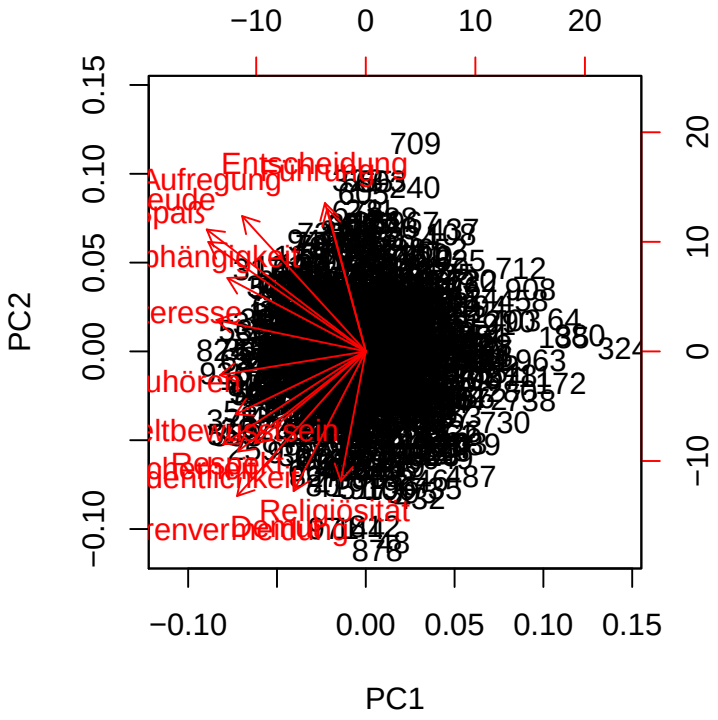


Biplot

Eine gute Möglichkeit die Ergebnisse der PCA zu analysieren, besteht darin, die ersten Komponenten zuzuordnen, die es uns ermöglichen, die Daten in einem niedrigdimensionalen Raum zu visualisieren. Eine gemeinsame Visualisierung ist ein Biplot. Dies ist ein zweidimensionales Diagramm von Datenpunkten in Bezug auf die ersten beiden Hauptkomponenten, die mit einer Projektion der Variablen auf die Komponenten überlagert wird.

Dazu verwenden wir `biplot()`:

```
biplot(Werte.pc)
```



Die Variablen-Gruppierungen sind als rote Ladungspfeile sichtbar. Zusätzlich erhalten wir einen Einblick in die Bewertungscluster (als dichte Bereiche von Beobachtungspunkten). Der Biplot ist hier durch die große Anzahl an Beobachtung recht unübersichtlich.

Extraktion der Komponenten

Am einfachsten lassen sich die Komponenten extrahieren mit dem `principal`-Befehl aus dem psych-Paket (ist durch das Paket nFactors bereits geladen)

```
Werte.pca<-principal(Werte, nfactors=5)
print(Werte.pca, cut=0.5, sort = TRUE, digits=2)
```

```
## Principal Components Analysis
## Call: principal(r = Werte, nfactors = 5)
## Standardized loadings (pattern matrix) based upon correlation matrix
##                    item   RC1   RC2   RC3   RC5   RC4   h2   u2 com
## Spaß                  1  0.83                       0.71 0.29 1.1
## Freude                2  0.78                       0.65 0.35 1.2
## Aufregung             3  0.76                       0.63 0.37 1.2
## Sicherheit           10        0.79                 0.64 0.36 1.0
```

```
## Gefahrenvermeidung    9        0.75                      0.67 0.33 1.3
## Ordentlichkeit       11        0.70                      0.50 0.50 1.1
## Unabhängigkeit       12                                  0.53 0.47 4.2
## Entscheidung          5              0.94                0.89 0.11 1.0
## Führung               4              0.92                0.88 0.12 1.1
## Zuhören              13                    0.77          0.66 0.34 1.2
## Interesse            15                    0.76          0.63 0.37 1.2
## Umweltbewusstsein    14                    0.73          0.57 0.43 1.2
## Religiösität          6                          0.74    0.57 0.43 1.1
## Demut                 8                          0.72    0.56 0.44 1.2
## Respekt               7                          0.62    0.54 0.46 1.8
##
##                        RC1  RC2  RC3  RC5  RC4
## SS loadings           2.08 2.02 1.89 1.87 1.76
## Proportion Var        0.14 0.13 0.13 0.12 0.12
## Cumulative Var        0.14 0.27 0.40 0.52 0.64
## Proportion Explained  0.22 0.21 0.20 0.19 0.18
## Cumulative Proportion 0.22 0.43 0.62 0.82 1.00
##
## Mean item complexity =  1.4
## Test of the hypothesis that 5 components are sufficient.
##
## The root mean square of the residuals (RMSR) is  0.07
##  with the empirical chi square  1037.66  with prob <  1.6e-191
##
## Fit based upon off diagonal values = 0.88
```

Interpretation der Ergebnisse der PCA I:

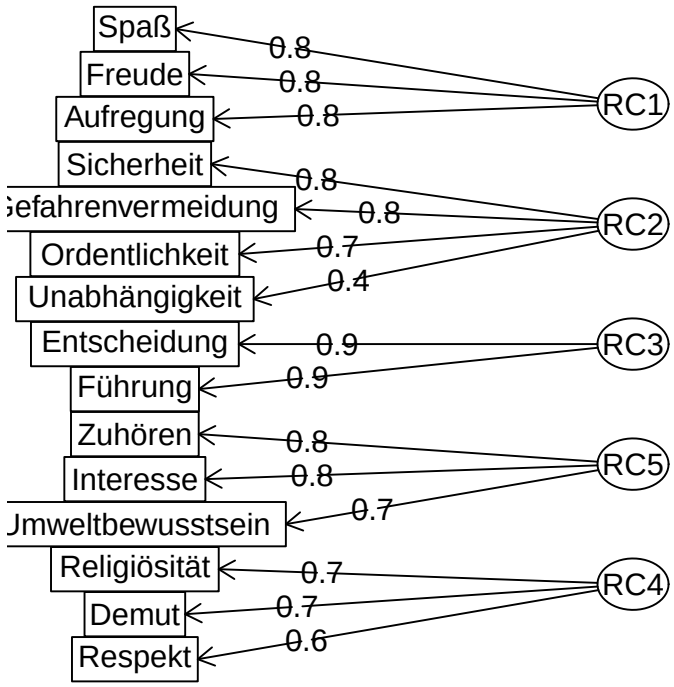
- Das Ergebnis sieht sehr gut aus. Es laden immer mehrere Items (mindestens 2) hoch (> 0,5) auf einer Komponente (die mit RC1 bis RC5 bezeichnet werden, RC steht für Rotated Component). Innerhalb einer PCA kann die Interpretierbarkeit über eine **Rotation** erhöht werden. Wenn die Rotation nicht ausgeschlossen wird (mit dem Argument `rotate="none"`), dann ist die Voreinstellung eine `Varimax-Rotation`.

- Es gibt keine Items die auf mehr als einer Komponente hoch laden. Die Ladungen sind Korrelationskoeffizienten zwischen den Items und den Hauptkomponenten.
- In der Zeile SS loadings finden wir die Eigenwerte der fünf Hauptkomponenten. Den Anteil an der Gesamtvarianz, den sie erklären, findet man in der Zeile Proportion Var. Aufsummiert sind die Anteile in der Zeile Cumlative Var. Insgesamt werden durch die fünf Hauptkomponenten 64% der Gesamtvarianz erklärt.
- Einzig das Item `Unabhängigkeit` lädt auf keine der Hauptkomponenten hoch.
- Die Erste Komponenten (RC1) könnte mit **Genuss**, die zweite (RC2) mit **Sicherheit**, die dritte (RC3) mit **Annerkennung**, die vierte (RC4) mit **Konformismus** und die fünfte mit **Bewusstsein** bezeichnet werden.

Grafische Darstellung

Mit der Funktion `fa.diagram` kann das Ergebnis auch grafisch dargestellt werden.

```
fa.diagram(Werte.pca)
```



Exploratorische Faktorenanalyse (EFA)

EFA ist eine Methode, um die Beziehung von Konstrukten (Konzepten), d. h. Faktoren zu Variablen zu beurteilen. Dabei werden die Faktoren als **latente Variablen** betrachtet, die nicht direkt beobachtet werden können. Stattdessen werden sie empirisch durch mehrere Variablen beobachtet, von denen jede ein Indikator der zugrundeliegenden Faktoren ist. Diese beobachteten Werte werden als **manifeste Variablen** bezeichnet und umfassen Indikatoren. Die EFA versucht den Grad zu bestimmen, in dem Faktoren die beobachtete Streuung der manifesten Variablen berücksichtigen.

Vergleich zur PCA

Das Ergebnis der EFA ist ähnlich zur PCA: eine Matrix von Faktoren (ähnlich zu den PCA-Komponenten) und ihre Beziehung zu den ursprünglichen Variablen (Ladung der Faktoren auf die Variablen). Im Gegensatz zur PCA versucht die EFA, Lösungen zu finden, die in den **manifesten variablen maximal interpretierbar** sind. Im Allgemeinen versucht sie, Lösungen zu finden, bei denen eine kleine Anzahl von Ladungen für jeden Faktor sehr hoch ist, während andere Ladungen für diesen Faktor gering sind. Wenn dies möglich ist, kann dieser Faktor mit diesem Variablen-Set interpretiert werden.

Finden einer EFA Lösung

Als erstes muss die Anzahl der zu schätzenden Faktoren bestimmt werden. Hierzu verwenden wir wieder das Ellbow-Kriterium und das Eigenwert-Kriterium. Beide Kriterien haben wir schon bei der PCA verwendet, dabei kommen wir auf 5 Faktoren.

Durch das Paket `nFactors` bekommen wir eine formalisierte Berechnung der Scree-Plot Lösung mit dem Befehl `nScree()`

```
library(nFactors)
nScree(Werte)
```

```
##   noc naf nparallel nkaiser
## 1   5   3         5       5
```

`nScree` gibt vier methodische Schätzungen für die Anzahl an Faktoren durch den Scree-Plot aus. Wir sehen, dass drei von vier Methoden fünf Faktoren vorschlagen.

Schätzung der EFA

Eine EFA wird geschätzt mit dem Befehl `factanal(x,factors=k)`, wobei `k` die Anzahl Faktoren angibt.

```
Werte.fa<-factanal(Werte, factors=5)
Werte.fa
```

```
##
## Call:
## factanal(x = Werte, factors = 5)
##
## Uniquenesses:
##                Spaß              Freude           Aufregung
##               0.401               0.486               0.584
##             Führung        Entscheidung       Religiösität
##               0.243               0.139               0.660
##             Respekt               Demut Gefahrenvermeidung
##               0.662               0.626               0.395
##          Sicherheit     Ordentlichkeit     Unabhängigkeit
##               0.481               0.729               0.713
##             Zuhören  Umweltbewusstsein           Interesse
##               0.463               0.666               0.561
##
## Loadings:
##                     Factor1 Factor2 Factor3 Factor4 Factor5
## Spaß                         0.756           0.147
## Freude                       0.686           0.149
## Aufregung            0.172   0.611
## Führung              0.849   0.131          -0.133
## Entscheidung         0.921
## Religiösität                -0.123                   0.568
## Respekt                      0.154   0.266           0.492
## Demut                                0.168           0.580
## Gefahrenvermeidung                   0.715           0.298
## Sicherheit                           0.710
## Ordentlichkeit                       0.483   0.132   0.137
## Unabhängigkeit       0.188   0.230   0.268   0.265  -0.240
## Zuhören             -0.114   0.158           0.698   0.106
## Umweltbewusstsein                    0.149   0.539   0.111
## Interesse                    0.181           0.618  -0.109
##
##                Factor1 Factor2 Factor3 Factor4 Factor5
## SS loadings      1.668   1.600   1.473   1.332   1.116
## Proportion Var   0.111   0.107   0.098   0.089   0.074
## Cumulative Var   0.111   0.218   0.316   0.405   0.479
##
## Test of the hypothesis that 5 factors are sufficient.
## The chi square statistic is 93.28 on 40 degrees of freedom.
## The p-value is 3.83e-06
```

Eine übersichtlichere Ausgabe bekommen wir mit dem `print` Befehl, in dem wir zusätzlich noch die Dezimalstellen kürzen mit `digits=2`, alle Ladungen kleiner als 0,5 ausblenden mit `cutoff=.4` und die Ladungen mit `sort=TRUE` so sortieren, dass die Ladungen, die auf einen Faktor laden, untereinander

stehen.

```
print(Werte.fa, digits=2, cutoff=.4, sort=TRUE)
```

```
##
## Call:
## factanal(x = Werte, factors = 5)
##
## Uniquenesses:
##               Spaß             Freude          Aufregung
##               0.40               0.49               0.58
##            Führung       Entscheidung       Religiösität
##               0.24               0.14               0.66
##            Respekt              Demut Gefahrenvermeidung
##               0.66               0.63               0.39
##         Sicherheit     Ordentlichkeit     Unabhängigkeit
##               0.48               0.73               0.71
##            Zuhören  Umweltbewusstsein          Interesse
##               0.46               0.67               0.56
##
## Loadings:
##                    Factor1 Factor2 Factor3 Factor4 Factor5
## Führung             0.85
## Entscheidung        0.92
## Spaß                        0.76
## Freude                      0.69
## Aufregung                   0.61
## Gefahrenvermeidung                  0.72
## Sicherheit                          0.71
## Zuhören                                     0.70
## Umweltbewusstsein                           0.54
## Interesse                                   0.62
## Religiösität                                        0.57
## Demut                                               0.58
## Respekt                                             0.49
## Ordentlichkeit                      0.48
## Unabhängigkeit
##
##                Factor1 Factor2 Factor3 Factor4 Factor5
## SS loadings       1.67    1.60    1.47    1.33    1.12
## Proportion Var    0.11    0.11    0.10    0.09    0.07
## Cumulative Var    0.11    0.22    0.32    0.40    0.48
##
## Test of the hypothesis that 5 factors are sufficient.
## The chi square statistic is 93.28 on 40 degrees of freedom.
## The p-value is 3.83e-06
```

Standardmäßig wird bei `factanal()` eine Varimax-Rotation durchgeführt (das Koordinatensystem der Faktoren wird so rotiert, das eine optimale Zuordnung zu den Variablen erfolgt). Bei Varimax gibt es keine Korrelationen zwischen den Faktoren. Sollen Korrelationen zwischen den Faktoren zugelassen werden, empfiehlt sich die Oblimin-Rotation mit dem Argument `rotation="oblimin"` aus dem Paket `GPArotation`.

Heatmap mit Ladungen

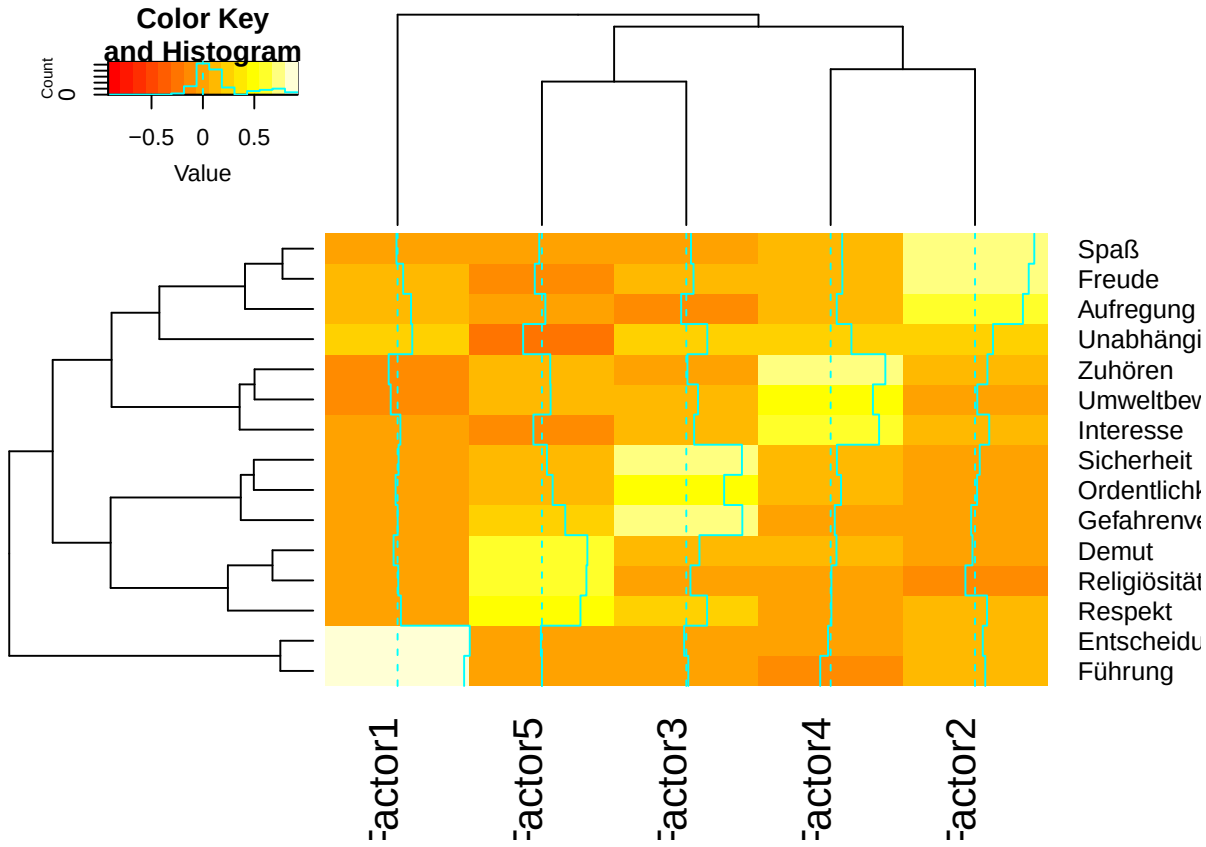
In der obigen Ausgabe werden die Item-to-Faktor-Ladungen angezeigt. Im zurückgegebenen Objekt `Werte.fa` sind diese als `$loadings` vorhanden. Wir können die Item-Faktor-Beziehungen mit einer Heatmap von `$loadings` visualisieren:

```
library (gplots)
```

```
##
## Attaching package: 'gplots'
```

```
## The following object is masked from 'package:stats':
##
##     lowess
```

```
heatmap.2(Werte.fa$loadings)
```



Das Ergebnis aus der Heatmap zeigt eine deutliche Trennung der Items in 5 Faktoren, die interpretierbar sind als **Anerkennung**, **Genuss**, **Sicherheit**, **Bewusstsein** und **Konformismus**.

Berechnung der Faktor-Scores

Zusätzlich zur Schätzung der Faktorstruktur kann die EFA auch die latenten Faktorwerte für jede Beobachtung schätzen. Die gängige Extraktionsmethode ist die Bartlett-Methode.

```
Werte.ob <- factanal(Werte, factors=5, scores="Bartlett")
Werte.scores <- data.frame(Werte.ob$scores)
names(Werte.scores) <- c("Anerkennung", "Genuss", "Sicherheit", "Bewusstsein", "Konformismus")
head(Werte.scores)
```

```
##   Anerkennung     Genuss Sicherheit Bewusstsein Konformismus
## 1   1.3800613  0.9847458  0.5632629   0.1731918   -0.1062450
## 2  -1.4035495 -0.7210411  1.5965857   1.1664029    0.6950300
## 3   1.5320158 -0.6574901  1.6721041  -2.0027410    0.2390436
## 4  -0.5790217  2.3443732 -1.0564093  -1.1195018   -0.1176405
## 5   0.2344081 -1.6524010  1.1888042  -1.7013443    0.4374048
## 6  -0.1303264  0.1110535 -1.0532476   0.7911486   -1.0034994
```

Wir haben nun anstatt der 15 Variablen 5 Faktoren mit Scores. Die Dimensionen wurden um ein Drittel reduziert.

Bildung der Konstukte durch Mittelwertbildung

Eine andere Möglichkeit ist die Bildung der Konstrukte über die Mittelwerte der Items. Dies ist jedoch nur sinnvoll, wenn einheitliche Skalen über alle Items hinweg vorliegen. Wir verwenden hierfür den Befehl `rowMeans`.

```
Werte$Anerkennung<-rowMeans(Werte[,c("Führung", "Entscheidung")], na.rm = TRUE)
Werte$Genuss<-rowMeans(Werte[,c("Spaß", "Freude", "Aufregung")], na.rm = TRUE)
Werte$Sicherheit<-rowMeans(Werte[,c("Gefahrenvermeidung", "Sicherheit","Ordentlichkeit")], na.rm = T
Werte$Bewusstsein<-rowMeans(Werte[,c("Zuhören",  "Umweltbewusstsein", "Interesse")], na.rm = TRUE)
Werte$Konformismus<-rowMeans(Werte[,c("Religiösität", "Respekt", "Demut")], na.rm = TRUE)
```

Interne Konsistenz der Skalen

Das einfachste Maß für die **interne Konsistenz** ist die **Split-Half-Reliabilität**. Die Items werden in zwei Hälften unterteilt und die resultierenden Scores sollten in ihren Kenngrößen ähnlich sein. Hohe Korrelationen zwischen den Hälften deuten auf eine hohe interne Konsistenz hin. Das Problem ist, dass die Ergebnisse davon abhängen, wie die Items aufgeteilt werden. Ein üblicher Ansatz zur Lösung dieses Problems besteht darin, den Koeffizienten **Alpha (Cronbachs Alpha)** zu verwenden.

Cronbachs Alpha

Der Koeffizient **Alpha** ist der Mittelwert aller möglichen Split-Half-Koeffizienten, die sich aus verschiedenen Arten der Aufteilung der Items ergeben. Dieser Koeffizient variiert von 0 bis 1. Formal ist es ein korrigierter durchschnittlicher Korrelationskoeffizient.

Zufriedenstellende Reliabilität wird bei einem Alpha-Wert von 0.7 erreicht. Werte unter 0.5 gelten als nicht akzeptabel, Werte ab 0.8 als gut.

Bewertung von Sicherheit

Wir bewerten nun die interne Konsistent der Items Beispielhaft für das Konstrukt `Sicherheit` und nehmen zur Demonstration das Item `Unabhängigkeit` mit in die Analyse auf.

```
alpha(Werte[, c("Unabhängigkeit", "Zuhören",  "Umweltbewusstsein", "Interesse")], check.keys=TRUE)
```

```
##
## Reliability analysis
## Call: alpha(x = Werte[, c("Unabhängigkeit", "Zuhören", "Umweltbewusstsein",
##     "Interesse")], check.keys = TRUE)
##
##   raw_alpha std.alpha G6(smc) average_r S/N   ase mean   sd
##       0.63      0.62    0.58      0.29 1.7 0.019  5.2 0.99
##
##  lower alpha upper     95% confidence boundaries
## 0.59 0.63 0.67
##
##  Reliability if an item is dropped:
##                   raw_alpha std.alpha G6(smc) average_r  S/N alpha se
## Unabhängigkeit         0.67      0.67    0.57      0.40 1.99    0.018
## Zuhören                0.50      0.49    0.41      0.25 0.98    0.027
## Umweltbewusstsein      0.57      0.56    0.48      0.30 1.28    0.024
## Interesse              0.48      0.48    0.40      0.23 0.91    0.028
```

```
##
##  Item statistics
##                       n raw.r std.r r.cor r.drop mean  sd
## Unabhängigkeit     1000  0.54  0.57  0.31   0.24  5.6 1.3
## Zuhören            1000  0.75  0.74  0.62   0.49  5.0 1.5
## Umweltbewusstsein 1000  0.69  0.68  0.51   0.40  4.9 1.5
## Interesse          1000  0.75  0.75  0.64   0.51  5.2 1.4
##
## Non missing response frequency for each item
##                       1    2    3    4    5    6    7 miss
## Unabhängigkeit     0.01 0.02 0.06 0.11 0.22 0.31 0.28    0
## Zuhören            0.02 0.05 0.09 0.17 0.25 0.25 0.18    0
## Umweltbewusstsein 0.02 0.04 0.12 0.20 0.24 0.23 0.16    0
## Interesse          0.01 0.04 0.08 0.14 0.22 0.30 0.21    0
```

Bei dem Konstrukt `Sicherheit` können wir durch Elimination von `Unabhängigkeit` das Cronbachs Alpha von 0,63 auf einen fast akzeptablen Wert von 0,69 erhöhen.

Das Argument `check.keys=TRUE` gibt uns eine Warnung aus, sollte die Ladung eines oder mehrerer Items negativ sein. Dies ist hier nicht der Fall, somit müssen auch keine Items recodiert werden.

Literatur

- Chris Chapman, Elea McDonnell Feit (2015): *R for Marketing Research and Analytics*, Kapitel 8.1-8.3
- Gareth James, Daniela Witten, Trevor Hastie, Robert Tibshirani (2013): *An Introduction to Statistical Learning – with Applications in R*, http://www-bcf.usc.edu/~gareth/ISL/, Kapitel 10.2, 10.4
- Reinhold Hatzinger, Kurt Hornik, Herbert Nagel (2011): *R – Einführung durch angewandte Statistik*. Kapitel 11
- Maike Luhmann (2015): R für Einsteiger, Kapitel 19

Versionshinweise:

- Datum erstellt: 2017-08-03
- R Version: 3.4.0